

# Quelques résultats de non-existence pour l'équation des surfaces minimales

Laurent Mazet

## Résumé

Dans cet article, nous démontrons qu'il n'existe pas de solution  $u$  de l'équation des surfaces minimales sur un domaine asymptotiquement égal au secteur angulaire valant  $+\infty$  sur un de ses bords et  $-\infty$  sur l'autre.

## Abstract

In this article, we prove that there does not exist a solution  $u$  of the minimal surfaces equation on a domain, which is asymptotically an angular sector, and taking the value  $+\infty$  on one side and  $-\infty$  on the other.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53A10.

## Introduction

Une fonction  $u$  définie sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  satisfait l'équation des surfaces minimales si :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad (\text{ESM})$$

Cette équation aux dérivées partielles traduit le fait que le graphe de la fonction  $u$  est une surface minimale de  $\mathbb{R}^3$ . A cette équation, on associe le problème de Dirichlet : il s'agit de trouver une solution  $u$  de l'équation des surfaces minimales sur un domaine  $\Omega$  en imposant la valeur de  $u$  sur le bord de  $\Omega$ .

Plusieurs solutions de l'équation (ESM) sont connues ; ainsi sur la demi-bande  $\mathbb{R}_+ \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , la fonction  $h(x, y) = x \tan y$  est solution de (ESM). Le graphe de  $h$  est un morceau d'hélicoïde. On constate que si  $(x_n, y_n)$  converge

vers un point de  $\mathbb{R}_+^* \times \{\frac{\pi}{2}\}$  la suite  $(h(x_n, y_n))$  converge vers  $+\infty$  et si  $(x_n, y_n)$  converge vers un point de  $\mathbb{R}_+^* \times \{-\frac{\pi}{2}\}$ , on a alors  $\lim h(x_n, y_n) = -\infty$ .  $h$  se présente donc comme une solution du problème de Dirichlet sur la demi-bande avec les valeurs 0 sur  $\{0\} \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $+\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \{\frac{\pi}{2}\}$  et  $-\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \{-\frac{\pi}{2}\}$ .

Maintenant la question que l'on se pose est de savoir ce qu'il se passe si les deux demi-droites appartenant au bord de la demi-bande ne sont plus parallèles mais forment un angle  $2\alpha > 0$ . Plus précisément, si  $\Omega$  est le domaine  $\{(x, y) \in [1, +\infty[ \times \mathbb{R} \mid -\tan \alpha < \frac{y}{x} < \tan \alpha\}$ , existe-t'il une solution  $u$  de (ESM) sur  $\Omega$  telle que  $u$  prenne la valeur 0 sur  $\Omega \cap \{x = 1\}$ , tende vers  $+\infty$  sur  $\Omega \cap \{x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0\}$  et tende vers  $-\infty$  sur  $\Omega \cap \{x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0\}$  ?

On connaît de nombreux résultats concernant le problème de Dirichlet sur le secteur ainsi, dans [RSE], H. Rosenberg et R. Sa-Earp construisent des solutions pour des données continues sur le bord d'un domaine convexe inclus dans un secteur angulaire. Dans [Ni], J.C.C. Nitsche se pose la question d'un principe du maximum pour le secteur, un tel principe est démontré dans [RSE] ce qui implique, d'après le résultat de P. Collin et R. Krust dans [CK], l'unicité des solutions ayant des données bornées sur le bord. On a d'autres résultats d'unicité, ainsi C.-C. Lee, dans [Le], démontre l'unicité en imposant des conditions sur les dérivées au bord.

La réponse à la question posée plus haut est apportée par le Théorème 1 et cette réponse est négative : une solution de (ESM) prenant la valeur  $+\infty$  sur un coté d'un secteur et  $-\infty$  sur l'autre ne peut exister.

Le Théorème 1 est le principal résultat de cet article. Il concerne les domaines  $\Omega$  tels que, hors d'un disque de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = \{r \cos \theta, r \sin \theta\} \in \mathbb{R}^2 \mid r > r_0, -\alpha < \theta < \alpha\}$  avec  $0 < \alpha < \pi$ . Le Théorème 1 affirme alors qu'il n'existe pas de solution  $u$  de (ESM) sur  $\Omega$  telle que  $u$  tende vers  $+\infty$  sur l'un des cotés de ce secteur angulaire et  $-\infty$  sur l'autre.

Dans une première partie, nous donnons quelques résultats préliminaires. Parmi ceux-ci le plus important est la Proposition 3 qui donne le résultat du Théorème 1 dans le cas de petits angles  $\alpha$ .

La deuxième partie est consacrée à la preuve du Théorème 1. L'idée principale de la preuve est que l'existence de fonctions  $u$  contredisant le résultat pour de grands angles implique l'existence de fonctions  $v$  contredisant le résultat pour de petits angles. On entrerait ainsi en contradiction avec la Proposition 3.

La troisième partie donne une généralisation de ce résultat dans le cas où l'angle  $\alpha$  est supérieur à  $\pi$ .

Dans la suite, si  $u$  est une fonction définie sur un domaine  $\Omega$  on notera

$$W = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}.$$

## 1 Quelques cas particuliers

### 1.1 Préliminaires

**Proposition 1.** *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  tel qu'une composante connexe de son bord soit une droite  $L$  ; on suppose de plus qu'il existe une partie  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\Omega \setminus \Delta$  soit isométrique à la bande  $] - \varepsilon, 0[ \times \mathbb{R}$  ( $\varepsilon > 0$ ) où  $L$  est la droite  $\{0\} \times \mathbb{R}$ . Alors il n'existe pas de solution  $u$  de l'équation des surfaces minimales qui prend la valeur  $+\infty$  sur  $L$  (de même pour  $-\infty$ ).*

*Démonstration.* Supposons, par l'absurde, que  $u$  soit une solution de l'équation des surfaces minimales sur  $] - \varepsilon, 0[ \times \mathbb{R}$  valant  $+\infty$  sur  $L$ . Alors le graphe de  $u$  contredit le principe du demi-espace, plus précisément, la démonstration du Théorème 1 dans [HM] contredit l'existence du graphe de  $u$ .  $\square$

Par la suite nous allons avoir besoin d'estimées sur les dérivées de solution de l'équation des surfaces minimales. On a alors le résultat suivant.

**Lemme 1.** *Soit  $\Omega$  un domaine convexe du plan  $\mathbb{R}^2$  et  $u$  une solution de l'équation des surfaces minimales sur  $\Omega$ . On considère  $p$  un point de  $\Omega$  et  $d$  la distance du point  $p$  au bord de  $\Omega$ . On note  $q \in \partial\Omega$  un point qui réalise cette distance,  $n$  le vecteur unitaire  $\frac{\overrightarrow{pq}}{d}$  et  $n'$  un vecteur unitaire normal à  $n$ . On note maintenant  $\Sigma$  le graphe de  $u$  et  $P$  le point de  $\Sigma$  au dessus de  $p$ . Soit  $r$  la distance le long de la surface  $\Sigma$  du point  $P$  au bord de  $\Sigma$ . Alors si le rapport  $\frac{d}{r}$  est inférieur à  $\frac{1}{8}$ , on a au point  $p$  :*

$$\begin{aligned} \frac{|n \cdot \nabla u(p)|}{W} &\geq 1 - 4\frac{d^2}{r^2} \\ \frac{|n' \cdot \nabla u(p)|}{W} &\leq 2\sqrt{2}\frac{d}{r} \end{aligned}$$

Il s'agit du Lemme 1 dans [JS].

### 1.2 Le cas du secteur angulaire

Pour  $0 < \alpha < \pi$ , on considère le domaine de  $\mathbb{R}^2$  :

$$D(\alpha) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta)\}_{r \in \mathbb{R}_+, \theta \in [-\alpha, \alpha]}$$

Pour tout  $\theta$ , on note  $L(\theta) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta)\}_{r \in \mathbb{R}_+^*}$  ; on a alors la proposition suivante :

**Proposition 2.** *Soit  $\alpha \in ]0, \pi[$ . Il n'existe pas de solution  $u$  de l'équation des surfaces minimales sur  $D(\alpha)$  telle que  $u$  prenne la valeur  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sur  $L(\alpha)$  (resp.  $L(-\alpha)$ ).*

*Démonstration.* Supposons qu'une telle solution  $u$  existe. Alors d'après le Théorème 3 et la Remarque 1 dans [Ma1], on peut prolonger le graphe de la fonction  $u$  par symétrie par rapport à la droite verticale de  $\mathbb{R}^3$  :  $L = \{x = 0\} \cap \{y = 0\}$ . La surface  $\Sigma$  ainsi obtenue est une surface minimale complète simplement connexe ayant un nombre fini de points de branchement le long de la droite verticale de symétrie  $L$ . Comme  $\Sigma$  est un graphe au dessus de  $D(\alpha)$ , les points de  $\Sigma$  ayant une normale horizontale sont les points de  $L$ .

D'après le Lemme 4 dans [Ma2], la courbe  $r \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, u(r \cos \theta, r \sin \theta))$  appartenant à  $\Sigma$  a pour extrémité lorsque  $r \rightarrow 0$  un point de  $L$  où la normale vaut  $(\sin \theta, -\cos \theta, 0)$  ou  $(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ . De plus tout point de  $L$  est l'extrémité d'une telle courbe. Ceci implique que pour  $\theta \in ]\alpha - \pi, \pi - \alpha[$  l'un des vecteurs suivant  $(\sin \theta, -\cos \theta, 0)$  ou  $(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$  n'est jamais la normale à  $\Sigma$ , en effet ces deux vecteurs ne peuvent être la normale à  $\Sigma$  qu'en l'extrémité de  $r \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, u(r \cos \theta, r \sin \theta))$  ce qui ne fait qu'un seul point. On sait ainsi que la normale à  $\Sigma$  omet un nombre infini de points de la sphère et même un segment dans la sphère par continuité de la normale. Or ceci est impossible pour une surface minimale complète simplement connexe ayant un nombre fini de points de branchement (Théorème 8.2 dans [Os2]).  $\square$

### 1.3 Le cas des petits angles

Soit  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $a$  un nombre réel positif. On note alors  $D_a(\alpha) = D(\alpha) \cap \{x \geq a\}$ . Par abus de notation, on continue à noter  $L(\theta)$  l'intersection de  $L(\theta)$  avec  $D_a(\alpha)$ .

**Proposition 3.** *Il existe  $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$  tel que si  $0 < \alpha < \alpha_0$  et  $a \in \mathbb{R}_+$ , il n'existe pas de solution  $u$  de l'équation des surfaces minimales sur  $D_a(\alpha)$  telle que  $u$  prenne la valeur  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sur  $L(\alpha)$  (resp.  $L(-\alpha)$ ).*

*Démonstration.* Supposons qu'une telle solution  $u$  existe. On considère  $p$  un point de  $D_a(\alpha)$  de coordonnées  $(x, y)$ . Soit  $x_0 > a$  tel que  $x_0 \sin \alpha = x_0 - a$ . Si le point  $p$  vérifie  $x \geq x_0$ , le point  $q$  du bord de  $D_a(\alpha)$  qui réalise la distance de  $p$  au bord de  $D_a(\alpha)$  n'est pas situé sur  $\{x = a\}$  mais sur  $L(\alpha)$  ou  $L(-\alpha)$  et on a  $|pq| \leq x \sin \alpha$ . Le long du graphe de  $u$  la distance de  $P$ , le point de coordonnées  $(x, y, u(x, y))$ , au bord du graphe est minorée par  $x - a$ . Le

rapport entre ces deux longueurs est donc majorée par

$$\frac{x \sin \alpha}{x - a} = \sin \alpha \frac{1}{1 - \frac{a}{x}}$$

Posons  $x_1 = \max\{x_0, 10a\}$ , alors si  $p$  vérifie  $x \geq x_1$  le rapport entre ces deux longueurs est majorée par  $\frac{10}{9} \sin \alpha$ . Notons  $\alpha_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  le nombre vérifiant  $\frac{10}{9} \sin \alpha_1 = \frac{1}{8}$ . Donc si  $\alpha < \alpha_1$  on peut appliquer le Lemme 1 au point  $p$ . Le vecteur  $\frac{\vec{pq}}{|pq|}$  est  $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$  ou  $(-\sin \alpha, -\cos \alpha)$ . On en déduit alors, par le Lemme 1 que

$$\begin{aligned} \frac{|u_y|}{W} &\geq (1 - 4 \left(\frac{10}{9}\right)^2 \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2\sqrt{2} \frac{10}{9} \sin^2 \alpha \\ &\geq \cos \alpha - \sin^2 \alpha \left( 4 \left(\frac{10}{9}\right)^2 \cos \alpha + 2\sqrt{2} \frac{10}{9} \right) \end{aligned}$$

Il existe donc  $\alpha_0 < \alpha_1$  tel que si  $\alpha \leq \alpha_0$  on a  $|u_y(p)| \neq 0$ , pour tout point  $p = (x, y)$  avec  $x \geq x_1$ , et donc  $u_y > 0$  (On remarque que  $\alpha_0$  ne dépend pas de  $a$ ).

On se place maintenant avec  $\alpha \leq \alpha_0$  et sur  $D_a(\alpha) \cap \{x \geq x_1\}$  on pose  $\Phi(x, y) = (x, u(x, y))$ . On définit ainsi une application à valeur dans  $[x_1, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . La différentielle de  $\Phi$  est

$$d\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & u_x \\ 0 & u_y \end{pmatrix}$$

dont le jacobien est non nul puisque sa valeur est  $u_y \neq 0$ .  $\Phi$  est donc un difféomorphisme local ; en fait, il s'agit d'un difféomorphisme global de  $D_a(\alpha) \cap \{x \geq x_1\}$  sur  $[x_1, +\infty[ \times \mathbb{R}$  car  $u$  croît strictement de  $-\infty$  à  $+\infty$  le long des courbes  $x = \text{cste}$ .

On voit ainsi que le graphe de  $u$  au dessus de  $D_a(\alpha) \cap \{x \geq x_1\}$  peut être vu comme le graphe d'une fonction  $v$  solution de (ESM) au dessus du demi-plan vertical  $\{y = 0, x \geq x_1\}$ . La fonction  $v$  est alors bornée sur  $\{x = x_1\}$  ; donc, d'après le résultat de P. Collin et R. Krust (Théorème 3.4 dans [CK]), le graphe est asymptote à un plan d'équation  $y = cx + d$  et de plus ils existent  $d_1$  et  $d_2$  tel que l'on ait  $cx + d_1 \leq v(x, z) \leq cx + d_2$  ce qui est impossible à cause de la forme de  $D_a(\alpha)$ .  $\square$

## 2 Le résultat général

Nous avons maintenant un résultat similaire à celui de la Proposition 3 mais sans limite sur l'angle  $\alpha$ .

**Théorème 1.** Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  tel qu'il existe un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in ]0, \pi[$  vérifiant  $\Omega \setminus K = D(\alpha) \setminus D(0, r)$  où  $D(0, r)$  désigne le disque de centre l'origine et de rayon  $r$ . Alors, il n'existe pas de solution  $u$  de l'équation des surfaces minimales sur  $\Omega$  telle que  $u$  prenne la valeur  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sur  $L(\alpha)$  (resp.  $L(-\alpha)$ ).

*Démonstration.* Supposons qu'une telle solution existe, nous avons donc une fonction  $u$  sur  $D(\alpha) \setminus D(0, 1)$  (on suppose  $r = 1$ ) qui prend la valeur  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sur  $L(\alpha)$  (resp.  $L(-\alpha)$ ). L'idée de la preuve est de se servir de  $u$  pour construire une fonction qui contredirait la Proposition 3.

Soit  $\beta > 0$  tel que  $\beta$  est inférieur à  $\alpha$  et  $\frac{\pi}{4}$ . On note alors  $A_r, B_r, C_r$  et  $D_r$  les points de  $D(\alpha)$  de coordonnées polaires respectives  $(r, \alpha)$ ,  $(r, \alpha - \beta)$ ,  $(r, -\alpha + \beta)$  et  $(r, -\alpha)$ . On a alors le résultat suivant

**Lemme 2.** Il existe  $\beta \leq \min\{\alpha, \frac{\pi}{4}, 2\alpha_0\}$  ( $\alpha_0$  est l'angle donné par la Proposition 3) et  $r_0 > 1$  tels que la fonction  $u$  soit croissante

- le long des deux arcs de cercles de centre l'origine joignant  $B_r$  à  $A_r$  et  $D_r$  à  $C_r$  et
- le long des deux segments  $[B_r, A_r]$  et  $[D_r, C_r]$

pour  $r > r_0$ .

*Démonstration.* Par symétrie du problème, on ne considèrera que le segment  $[B_r, A_r]$  et l'arc de cercle joignant  $B_r$  à  $A_r$ . Soit  $p$  un point de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  avec  $\theta \in [\alpha - \beta, \alpha]$  et  $\rho \geq \frac{2}{2-\sqrt{2}}$ ; alors le point  $q$  du bord de  $D(\alpha) \setminus D(0, 1)$  qui réalise la distance de  $p$  au bord appartient à  $L(\alpha)$ . La distance  $|pq|$  est donc majorée par  $\rho \sin \beta$ , la distance le long du graphe de  $u$  de  $P$  le point du graphe situé au dessus de  $p$  au bord est minorée par  $\rho - 1$ . Le rapport entre ces deux longueurs est donc majoré par  $\sin \beta \frac{\rho}{\rho-1}$ . Ainsi, pour  $\rho \geq 10$ , le rapport est majoré par  $\frac{10}{9} \sin \beta$ ; soit  $\beta_1$  tel que  $\frac{10}{9} \sin \beta_1 = \frac{1}{8}$  alors pour  $\beta < \beta_1$  le rapport est inférieur à  $\frac{1}{8}$ .

On suppose  $\beta < \beta_1$ . On définit  $r_0$  tel que  $r_0 \cos \frac{\pi}{8} = 10$ . Soit  $r \geq r_0$  on suppose maintenant que  $p$  appartienne au segment  $[B_r, A_r]$  on a alors  $\rho \geq 10$  par définition de  $r_0$ . Le vecteur  $\frac{\vec{pq}}{|pq|}$  est  $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$  et le vecteur unitaire directeur de  $[B_r, A_r]$  est  $n = (-\sin(\alpha - \frac{\beta}{2}), \cos(\alpha - \frac{\beta}{2}))$ . D'après le Lemme 1, on a donc

$$\frac{|\nabla u \cdot n|}{W}(p) \geq (1 - 4(\frac{10}{9} \sin \beta)^2)(-\sin \alpha, \cos \alpha) \cdot n - 2\sqrt{2} \frac{10}{9} \sin \beta$$

On constate que lorsque  $\beta$  tend vers 0 le minorant tend vers 1. Il existe donc  $0 < \beta_2 < \beta_1$  tel que pour tout  $\beta < \beta_2$  :  $\frac{|\nabla u \cdot n|}{W}(p) > 0$ .

Si maintenant  $p$  est un point de l'arc de cercle joignant  $B_r$  à  $A_r$  le vecteur unitaire tangent à l'arc de cercle en  $p$  est  $n'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ . D'après le Lemme 1, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u \cdot n'(\theta)|}{W}(p) &\geq (1 - 4(\frac{10}{9} \sin \beta)^2)(-\sin \alpha, \cos \alpha) \cdot n'(\theta) - 2\sqrt{2}\frac{10}{9} \sin \beta \\ &\geq (1 - 4(\frac{10}{9} \sin \beta)^2)(-\sin \alpha, \cos \alpha) \cdot n'(\beta) - 2\sqrt{2}\frac{10}{9} \sin \beta \end{aligned}$$

De même que précédemment, le minorant tend vers 1 lorsque  $\beta$  tend vers 0. Il existe donc  $0 < \beta_3 < \beta_2$  tel que pour tout  $\beta < \beta_3$  :  $\frac{|\nabla u \cdot n'(\theta)|}{W}(p) > 0$ . Alors tout  $\beta < \min\{\beta_3, 2\alpha_0\}$  répond au lemme.  $\square$

On fixe maintenant  $\beta$  et  $r_0$  tels que le Lemme 2 soit satisfait. On a alors le résultat suivant

**Lemme 3.** *Il existe  $r_1 \geq r_0$  tel que si  $p \in D(\alpha)$  est le point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec  $r \geq r_1$  on a  $\frac{\partial u}{\partial \theta}(p) > 0$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord le Lemme 2 nous dit que la dérivée est positive si  $\theta \in ]-\alpha, -\alpha + \beta] \cup [\alpha - \beta, \alpha[$ . Maintenant si le lemme n'est pas vrai il existe une suite de point  $p_n$  de coordonnées polaires  $(r_n, \theta_n)$  telle que  $r_n \rightarrow +\infty$  et  $\frac{\partial u}{\partial \theta}(p_n) \leq 0$ . On a  $\theta_n \in [-\alpha + \beta, \alpha - \beta]$  et, quitte à extraire, on peut supposer que  $\theta_n \rightarrow \theta_\infty \in [-\alpha + \beta, \alpha - \beta]$ . On définit alors  $\Omega_n$  le domaine de  $\mathbb{R}^2$  :  $\Omega_n = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid r \geq r_n^{-1}, \theta \in ]-\alpha + \theta_\infty - \theta_n, \alpha + \theta_\infty - \theta_n[ \}$ . Sur  $\Omega_n$  on définit, en coordonnées polaires, la fonction  $v_n : v_n(r, \theta) = r_n^{-1}u(r_n r, \theta + \theta_\infty - \theta_n)$ .  $v_n$  est une solution de l'équation des surfaces minimales qui vaut  $+\infty$  sur  $L(\alpha + \theta_\infty - \theta_n)$  et  $-\infty$  sur  $L(-\alpha + \theta_\infty - \theta_n)$ . L'hypothèse sur  $u$  au point  $p_n$  se traduit par  $\frac{\partial v_n}{\partial \theta}(1, \theta_\infty) \leq 0$ .

On va maintenant étudier la limite de la suite  $(v_n)$  ; pour cela on va étudier les lignes de divergence de  $(v_n)$  (voir [Ma1] et [Ma2]). Le domaine limite est  $D(\alpha)$ . Comme  $v_n$  prend des valeurs infinies sur  $L(\alpha + \theta_\infty - \theta_n)$  et  $L(-\alpha + \theta_\infty - \theta_n)$ , les seules lignes de divergence possibles sont les droites incluses dans  $D(\alpha)$  et les demi-droites ayant l'origine pour extrémité ; on utilise ici le Lemme A.1 de [Ma2].

Considérons  $L(\gamma) \subset D(\alpha)$  et supposons que  $L(\gamma)$  soit une ligne de divergence. On considère  $\Psi_n$  la fonction conjuguée de  $v_n$  normalisée (en coordonnées polaires) par  $\Psi_n(r_n^{-1}, \theta_\infty) = 0$ . Alors en choisissant la bonne sous-suite, on a  $\Psi_n \rightarrow \Psi$  avec  $\Psi$  qui vérifie :  $\Psi = 0$  en l'origine,  $\Psi(\rho, \alpha) = -\rho$ ,  $\Psi(\rho, -\alpha) = -\rho$  et  $\Psi(\rho, \gamma) = \pm \rho$  suivant la valeur de la normale limite. Mais si  $\gamma \geq 0$ , comme  $\Psi$  est 1-lipschitzienne on a  $|\Psi(\rho, \alpha) - \Psi(\rho, \gamma)| < 2\rho$  ; donc

$\Psi(\rho, \gamma) = -\rho$  et la normale limite le long de  $L(\gamma)$  est  $(-\sin \gamma, \cos \gamma)$ ; de même si  $\gamma \leq 0$ . Ainsi pour  $L(\gamma)$  il n'y a qu'une possibilité pour la normale limite.

Supposons que la droite  $L \subset D(\alpha)$  soit une ligne de divergence; on a alors  $N_{n'}$  qui converge vers une normale à  $L$  le long de  $L$ . Soit  $L'$  la parallèle à  $L$  passant par l'origine. On s'intéresse maintenant à la suite  $(v_{n'})$ . Si une ligne de divergence pour  $(v_{n'})$  existe dans la bande comprise entre  $L$  et  $L'$  ce doit être une droite parallèle à  $L$ . Si un point de la bande comprise entre  $L$  et  $L'$  appartient au domaine de convergence de  $(v_{n'})$ , la composante connexe de  $\mathcal{B}(v_{n'})$  qui contient ce point vérifie alors les hypothèses de la Proposition 1 et la limite de la suite  $v_{n'}$  sur cette composante prend une valeur infinie sur une droite parallèle à  $L$ ; ceci est impossible par la Proposition 1. Ainsi en tout point de la bande comprise entre  $L$  et  $L'$  passe une ligne de divergence; de plus en tout point de cette bande  $N_{n'}$  converge vers le même vecteur unitaire que le long de  $L$ , ceci est entre autre vrai le long de  $L'$  sauf pour l'origine. Ainsi il existe  $\gamma$  tel que  $L(\gamma)$  et  $L(\gamma - \pi)$  soient deux lignes de divergence avec la même normale limite ce qui est impossible d'après le résultat du paragraphe précédent. Donc  $L$  ne peut être une ligne de divergence. Et les  $L(\gamma)$  sont les seules lignes de divergence possibles.

Si le point de coordonnées polaires  $(1, \theta_\infty)$  est un point d'une ligne de divergence la normale limite à ce point est  $(-\sin \theta_\infty, \cos \theta_\infty)$  ce qui contredit que  $\frac{\partial v_n}{\partial \theta}(1, \theta_\infty) \leq 0$ . Ce point appartient donc au domaine de convergence, or la composante connexe du domaine de convergence le contenant est un secteur angulaire compris entre  $L(\gamma_1)$  et  $L(\gamma_2)$  (avec  $-\alpha \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \alpha$ ) et la limite  $v$  de la suite  $(v_n)$  sur cette composante vaut  $+\infty$  sur  $L(\gamma_2)$  et  $-\infty$  sur  $L(\gamma_1)$  d'après les normales limites de long de ces deux lignes de divergence (Lemme A.2 de [Ma2]). Une telle solution  $v$  est impossible par la Proposition 2. On vient ainsi d'établir une contradiction, le lemme est donc démontré.  $\square$

Nous pouvons maintenant finir la preuve du théorème. On considère le domaine  $D_{r_1 \sin \frac{\beta}{2}}(\frac{\beta}{2})$  (avec  $\beta$  donné par Lemme 2 et  $r_1$  donné par le Lemme 3) et on note  $E_r$  le point de coordonnées polaires  $(r, \frac{\beta}{2})$  et  $F_r$  le point de coordonnées polaires  $(r, -\frac{\beta}{2})$ . Soit  $n$  un entier positif, les polygones  $A_{r_1} B_{r_1} B_{r_1+n} A_{r_1+n}$ ,  $C_{r_1} D_{r_1} D_{r_1+n} C_{r_1+n}$  et  $E_{r_1} F_{r_1} F_{r_1+n} E_{r_1+n}$  se déduisent alors les uns des autres par des déplacements et peuvent être ainsi identifiés. En utilisant ces identification on construit sur  $E_{r_1} F_{r_1} F_{r_1+n} E_{r_1+n}$  la solution  $w_n$  de l'équation des surfaces minimales valant  $u|_{[A_{r_1}, B_{r_1}]}$  sur  $[E_{r_1}, F_{r_1}]$ ,  $-\infty$  sur  $[F_{r_1}, F_{r_1+n}]$ ,  $u|_{[A_{r_1+n}, B_{r_1+n}]}$  sur  $[E_{r_1+n}, F_{r_1+n}]$  et  $+\infty$  sur  $[E_{r_1}, E_{r_1+n}]$  ( $w_n$



existe d'après le Théorème 2 de [JS]). D'après le principe du maximum et le Lemme 3, on a alors :

$$u|_{C_{r_1} D_{r_1} D_{r_1+n} C_{r_1+n}} \leq w_n \leq u|_{A_{r_1} B_{r_1} B_{r_1+n} A_{r_1+n}}$$

Ainsi  $(w_n)$  est uniformément bornée sur tout compact de  $D_{r_1 \sin \frac{\beta}{2}}(\frac{\beta}{2})$ . Donc une sous suite  $(w_{n'})$  converge sur  $D_{r_1 \sin \frac{\beta}{2}}(\frac{\beta}{2})$  vers une solution  $w$  de (ESM) prenant la valeur  $+\infty$  sur  $L(\frac{\beta}{2})$  et  $-\infty$  sur  $L(-\frac{\beta}{2})$ ; ainsi  $w$  contredit la Proposition 3 et le théorème est démontré.  $\square$

### 3 Une généralisation au cas $\alpha \geq \pi$

On souhaite pouvoir donné un sens au problème d'existence lorsque  $\alpha$  est plus grand que  $\pi$  et voir si le Théorème 1 reste vrai dans ce cas.

Pour cela posons  $D(\alpha_1, \alpha_2) = \{(r, \theta) \mid r \geq 0, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2\}$  muni de la métrique polaire  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$  (tout les points de la forme  $(0, \theta)$  sont identifiés, on appelle 0 ce nouveau point : c'est le sommet de  $D(\alpha_1, \alpha_2)$ ). Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $D(\alpha_1, \alpha_2)$  par  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $\varphi$  est alors une isométrie locale de  $D(\alpha_1, \alpha_2)$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Le couple  $(D(\alpha_1, \alpha_2), \varphi)$  est un multi-domaine (voir [Ma1]). Pour  $\alpha > 0$ , on note  $D(\alpha) = D(-\alpha, \alpha)$ ; on constate que, pour  $\alpha < \pi$ , cette définition est équivalente à celle de la section 1. Comme précédemment, on note  $L(\theta) = \{(r, \theta) \mid r > 0\}$ .

Pour pouvoir généraliser le Théorème 1, nous allons devoir rajouter des hypothèses.

#### 3.1 Le cas du secteur angulaire

Dans cette partie, nous généralisons la Proposition 2 mais pour cela nous devons rajouter une hypothèse sur  $\Psi_u$ .

**Proposition 4.** *Soit  $\alpha \geq \pi$ . Il n'existe pas de solution  $u$  de l'équation des surfaces minimales sur  $D(\alpha)$  telle que  $u$  prenne la valeur  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sur  $L(\alpha)$  (resp.  $L(-\alpha)$ ) et telle que  $\Psi_u \leq 0$  ( $\Psi_u$  est normalisée par  $\Psi_u(0) = 0$ )*

*Démonstration.* Supposons qu'une telle solution  $u$  existe. De même que dans la preuve de la Proposition 2, on peut prolonger le graphe de  $u$  par symétrie par rapport à l'axe verticale  $L = \{x = 0, y = 0\}$ . La surface  $\Sigma$  ainsi obtenue est une surface minimale complète de  $\mathbb{R}^3$ , elle est simplement connexe et régulière car  $\Psi_u \leq 0$ . On sait de plus que la normale à  $\Sigma$  est horizontale uniquement le long de  $L$ . Par le Lemme 4 dans [Ma2], le vecteur horizontal

$(\sin \theta, -\cos \theta, 0)$  ne peut être la normale à  $\Sigma$  qu'en l'extrémité de la courbe incluse dans  $\Sigma : r \mapsto (r \cos(\theta + k\pi), r \sin(\theta + k\pi), u(r, \theta + k\pi))$  avec  $-\alpha < \theta + k\pi < \alpha$ . Ainsi tout vecteur unitaire horizontal est normal à  $\Sigma$  qu'en un nombre fini de point. Ces vecteurs s'identifient à l'équateur de la sphère unité, or l'équateur est un ensemble de capacité logarithmique non nulle,  $\Sigma$  est donc de courbure totale finie d'après le Corollaire du Théorème 2.3 dans [Os1]. Comme  $\Sigma$  est de courbure totale finie,  $\Sigma$  est conformément équivalent au plan complexe  $\mathbb{C}$  (Théorème 9.1 dans [Os2]). De plus, on peut supposer que la symétrie par rapport à  $L$  corresponde sur  $\mathbb{C}$  à l'application  $\zeta \mapsto \bar{\zeta}$ . Sur  $\mathbb{C}$ , l'application de Gauss  $g$  est définie ;  $g$  est une application méromorphe. Comme la normale le long de  $L$  est horizontale, on a  $|g(\zeta)| = 1$  pour  $\zeta \in \mathbb{R}$ . De plus la symétrie par rapport à  $L$  nous dit que  $g(\bar{\zeta}) = \frac{1}{\overline{g(\zeta)}}$ . Comme la courbure totale est finie on sait enfin que  $g$  est une fraction rationnelle, en regroupant tout ces arguments on a :

$$g(\zeta) = e^{i\beta} \frac{\prod_{j=1}^n (\zeta - \zeta_j)}{\prod_{j=1}^n (\zeta - \bar{\zeta}_j)}$$

avec  $\beta \in [-3\pi/2, \pi/2[$ .

Supposons tout d'abord que  $\alpha = \pi$  et  $\beta = -3\pi/2$ . On considère la suite de points du graphe de  $u$  de coordonnées  $(0, 0, n)$ . On sait que la normale au graphe en ces points converge vers  $(0, -1, 0)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  d'après les valeurs de  $u$  sur le bord du domaine. Or si  $\zeta_n \in \mathbb{C}$  est le point correspondant à  $(0, 0, n)$ ,  $\zeta_n$  diverge dans  $\mathbb{C}$  et donc  $g(\zeta_n) \rightarrow e^{i\beta} = i$  ce qui nous donne que la valeur limite de la normale est  $(0, 1, 0)$  ; on a donc une contradiction et on suppose, dans la suite, que  $\alpha \neq \pi$  ou  $\beta \neq -3\pi/2$ .

On définit maintenant, sur  $D(\alpha)$ , la suite  $(u_n)$  des dilatés de  $u$  par  $u_n(r, \theta) = \frac{1}{n}u(nr, \theta)$ . On note  $\Psi_n$  la fonction conjuguée de  $u_n$  normalisée par  $\Psi_n(0) = 0$  ; on alors  $\Psi_n \leq 0$ . On s'intéresse à la limite de la normale au graphe de  $u_n$  au dessus du point  $(1, \beta + \pi/2) \in D(\alpha)$  (l'appartenance à  $D(\alpha)$  est due à l'hypothèse sur  $\alpha$  et  $\beta$ ). Cette normale est égale à la normale au graphe de  $u$  en  $P_n$  le point au dessus de  $p_n = (n, \beta + \pi/2)$ .  $P_n$  diverge dans  $\Sigma$  donc si  $\zeta_n$  est le point de  $\mathbb{C}$  correspondant, on a  $g(\zeta_n) \rightarrow e^{i\beta}$ . Donc la normale au graphe de  $u_n$  au dessus de  $(1, \beta + \pi/2)$  converge vers  $(\cos \beta, \sin \beta, 0)$ . On a donc une ligne de divergence qui est  $L(\beta + \pi/2)$  et  $\Psi_n(1, \beta + \pi/2) \rightarrow 1$  ce qui est impossible puisque  $\Psi_n \leq 0$ . On vient donc de prouver que  $u$  n'existe pas.  $\square$

### 3.2 Le cas général

On a maintenant la généralisation suivante du Théorème 1.

**Théorème 2.** *Soit  $\Omega$  un multi-domaine tel qu'il existe une partie  $K \subset \Omega$  et  $\alpha \geq \pi$  tels que  $\Omega \setminus K$  est isométrique à  $D(\alpha) \setminus D(0, r)$  où  $D(0, r)$  est l'ensemble des points de  $D(\alpha)$  à distance inférieure à  $r$  de 0. Alors il n'existe pas de solution  $u$  de l'équation des surfaces minimales telle que  $u$  prenne la valeur  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sur la demi-droite correspondant à  $L(\alpha)$  (resp.  $L(-\alpha)$ ) et  $\Psi_u \leq 0$  sur  $\Omega \setminus K$  pour un choix de normalisation pour  $\Psi_u$ .*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle du Théorème 1 ; les seules modifications apparaissent dans la preuve de l'équivalent du Lemme 3. On va donc réécrire la preuve du Lemme 3.

On suppose à nouveau que  $r = 1$ . Si le lemme n'est pas vrai on a une suite  $p_n = (r_n, \theta_n) \in D(\alpha)$  avec  $r_n \rightarrow +\infty$ ,  $\theta_n \rightarrow \theta_\infty \in ]-\alpha, \alpha[$  et  $\frac{\partial u}{\partial \theta}(p_n) < 0$ . On définit alors sur  $D(-\alpha + \theta_\infty - \theta_n, \alpha + \theta_\infty - \theta_n) \setminus D(0, r_n^{-1})$  la fonction  $v_n$  par  $v_n(r, \theta) = r_n^{-1}u(r_n r, \theta - \theta_n + \theta_\infty)$ .  $v_n$  est une solution de (ESM) qui vaut  $+\infty$  sur  $L(\alpha + \theta_\infty - \theta_n)$  et  $-\infty$  sur  $L(-\alpha + \theta_\infty - \theta_n)$ . On a alors  $\frac{\partial v_n}{\partial \theta}(1, \theta_\infty) < 0$ . Si on pose  $\Psi_n = \Psi_{v_n}$  normalisée par  $\Psi_n(r_n^{-1}, \theta_\infty) = r_n^{-1}\Psi_u(1, \theta_n) \rightarrow 0$ , on a  $\Psi_n \leq 0$ .

On étudie alors les lignes de divergence de la suite  $(v_n)$  sur le multi-domaine limite qui est  $D(\alpha)$ . Comme plus haut, les seules lignes de divergence sont les  $L(\gamma)$  ou les droites incluses dans  $D(\alpha)$ . Si  $L(\gamma)$  est une ligne de divergence on sait que pour une sous-suite  $\Psi_{n'} \rightarrow \Psi$  avec  $\Psi(0) = 0$  et  $\Psi(\rho, \gamma) = \pm \rho$ . Or  $\Psi \leq 0$  donc  $\Psi(\rho, \gamma) = -\rho$  et la normale limite le long de  $L(\gamma)$  est  $(-\sin \gamma, \cos \gamma)$ . Il y a donc une seule normale limite possible. Comme dans la preuve originale ceci implique que les  $L(\gamma)$  sont les seules lignes de divergence possibles.

Comme  $\frac{\partial v_n}{\partial \theta}(1, \theta_\infty) \leq 0$ , le point  $(1, \theta_\infty)$  appartient à  $\mathcal{B}(v_n)$  le domaine de convergence de  $v_n$ . La composante connexe de  $\mathcal{B}(v_n)$  contenant  $(1, \theta_\infty)$  est alors  $D(\gamma_1, \gamma_2)$  pour  $\gamma_1 < \gamma_2$ . Soit alors  $v$  une limite d'une sous-suite de  $(v_n)$  sur  $D(\gamma_1, \gamma_2)$ , on a  $\Psi_v = \lim \Psi_{n'} \leq 0$  et  $v$  vaut  $+\infty$  sur  $L(\gamma_2)$  et  $-\infty$  sur  $L(\gamma_1)$ . Ainsi  $v$  est une solution de (ESM) qui contredit la Proposition 4. L'équivalent du Lemme 3 est donc prouvé.  $\square$

## Références

- [CK] P. COLLIN ET R. KRUST, Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur des domaines non bornés, *Bul. Soc. Math. France.* **119** (1991), 443–462.
- [HM] D. HOFFMAN ET W.H. MEEKS III, The strong halfspace theorem for minimal surfaces, *Invent. Math.* **101** (1990), 373–377.
- [JS] H. JENKINS ET J. SERRIN, Variational problems of minimal surface type II, *Arch. Rational Mech. Anal.* **21** (1966), 321–342.
- [Le] C.-C. LEE, A uniqueness theorem for the minimal surface equation on an unbounded domain in  $\mathbb{R}^2$ , *Pacific J. Math.* **177** (1997), 103–107.
- [Ma1] L. MAZET, The Dirichlet problem for minimal surfaces equation and Plateau problem at infinity, à paraître dans *J. Inst. Math. Jussieu*.
- [Ma2] L. MAZET, The Plateau problem at infinity for horizontal ends and genus 1, preprint.
- [Ni] J.C.C. NITSCHKE, On new results on the theory of minimal surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **71** (1965), 195–270.
- [Os1] R. OSSERMAN, Global properties of minimal surfaces in  $E^3$  and  $E^n$ , *Ann. of Math.* **80**, 340–364.
- [Os2] R. OSSERMAN, *A Survey On Minimal Surfaces*, Van Nostrand Math. Studies. (1969).
- [RSE] H. ROSENBERG ET R. SA-EARP, The Dirichlet problem for the minimal surface equation on unbounded planar domains, *J. Math. Pures Appl.* **68** (1989), 163–183.

Laurent Mazet

Laboratoire Emile Picard (UMR 5580), Université Paul Sabatier,  
118, Route de Narbonne, 31062 Toulouse, France.

E-mail : mazet@picard.ups-tlse.fr